

MODELAJE DE TSUNAMI

MODELOS NUMERICOS PARA LA SIMULACION DE TSUNAMIS

Diego Arcas, Chris Moore, Nicolás Arcos

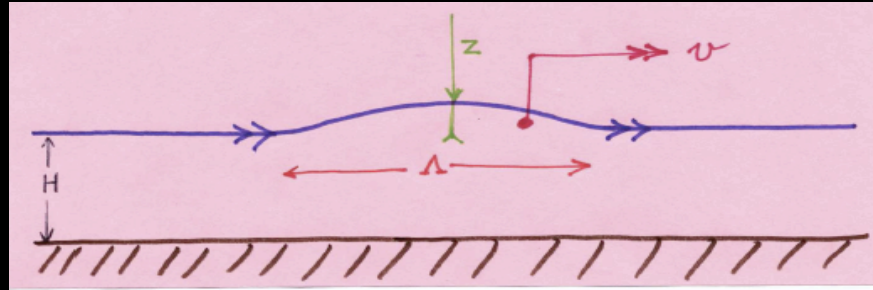
NOAA/PMEL

University of Washington

ITIC



Características físicas de un tsunami en alta mar



- Velocidad de propagación: La velocidad depende de la profundidad del océano, H.

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)} \xrightarrow{kH \sim 0} v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

En la práctica: H=5 Km, v=220 m/s (~=800 Km/h)

- Amplitud Máxima, z: desde unos pocos cms a 1.5 metros.
- Longitud de onda típica: $\Lambda = 300 \text{ km}$ (periodo ~ 600 s-3000 s)

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ecuación de cantidad de momento en X:

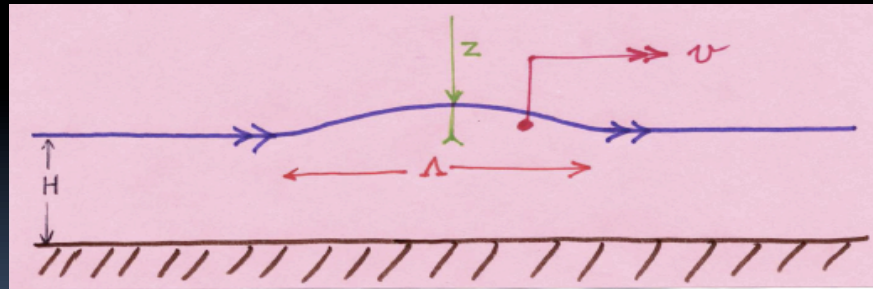
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Ecuación de cantidad de momento en Y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Ecuación de cantidad de momento en Z:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g$$



Aproximación Hidrostática:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

$$p(x, y, z, t) = \int_z^{\eta} \rho g dz = \rho g [\eta(x, y, t) - z]$$

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA

Aproximación Hidrostática:

$$p(x, y, z, t) = \int_z^{\eta} \rho g dz = \rho g [\eta(x, y, t) - z]$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Ecuación de cantidad de movimiento en X:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Ecuación de cantidad de movimiento en Y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\int_{-d}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-d}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-d}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

Se asumen perfiles uniformes de velocidad en u y v en la vertical.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \int_{-d}^{\eta} dz + \frac{\partial v}{\partial y} \int_{-d}^{\eta} dz + \int_{-d}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} (\eta + d) + \frac{\partial v}{\partial y} (\eta + d) + [w(x, y, z = \eta) - w(x, y, z = -d)] = 0$$

Ahora usamos la condición cinemática en la superficie

$$w(x, y, z = \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Y la condición de contorno en el fondo

$$w(x, y, z = -d) = -u \frac{\partial d}{\partial x} - v \frac{\partial d}{\partial y}$$

Hemos re-escrito w en términos de u, v y $h = \eta + d$

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Reemplazando los valores de w en el fondo y en la superficie del agua, en la ecuación de continuidad promediada y agrupando términos, obtenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0$$

más las dos ecuaciones del momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \frac{\partial d}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g \frac{\partial d}{\partial y}$$



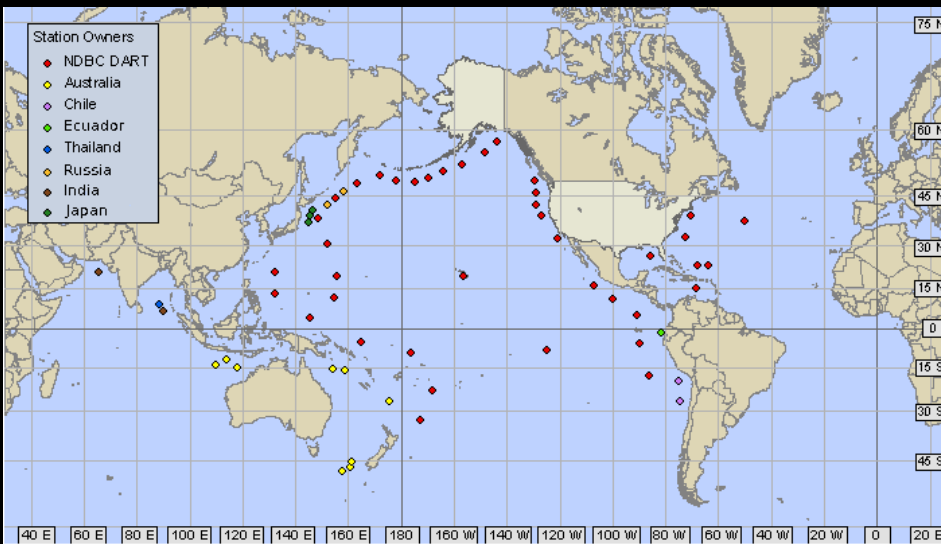
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \frac{\partial d}{\partial x}$$

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA

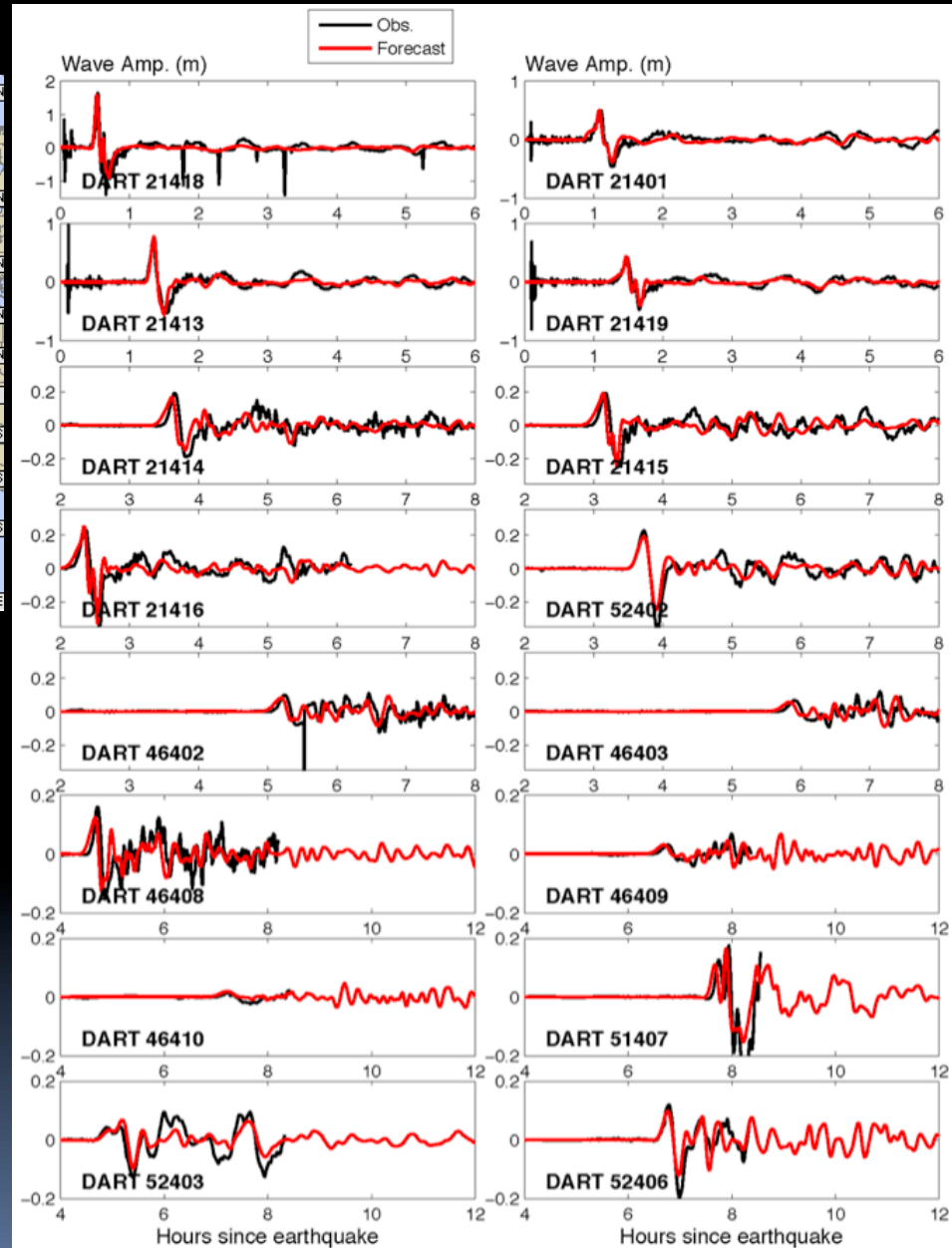
- Longitud de onda larga comparada con la profundidad del agua.
- Perfiles uniformes de velocidades horizontales.
- Condiciones de presión hidrostáticas.
- Viscosidad del fluido despreciable.

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA



Confirmación de los valores estimados de longitud de onda, amplitud y periodo de las olas de tsunami

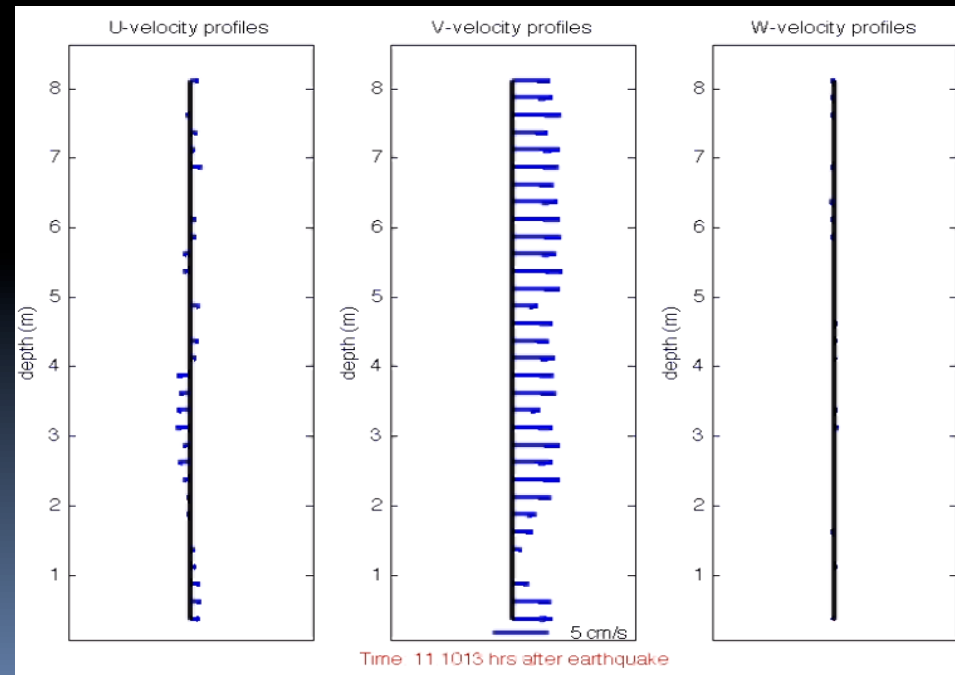
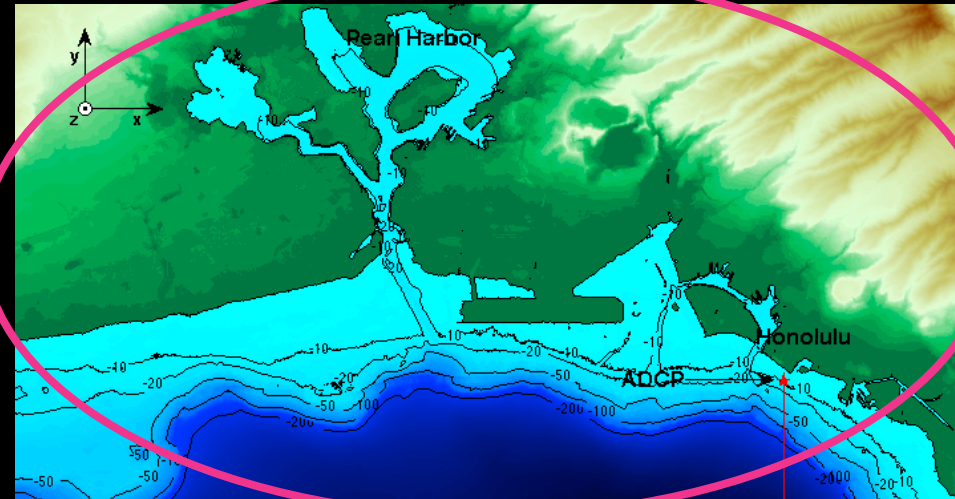
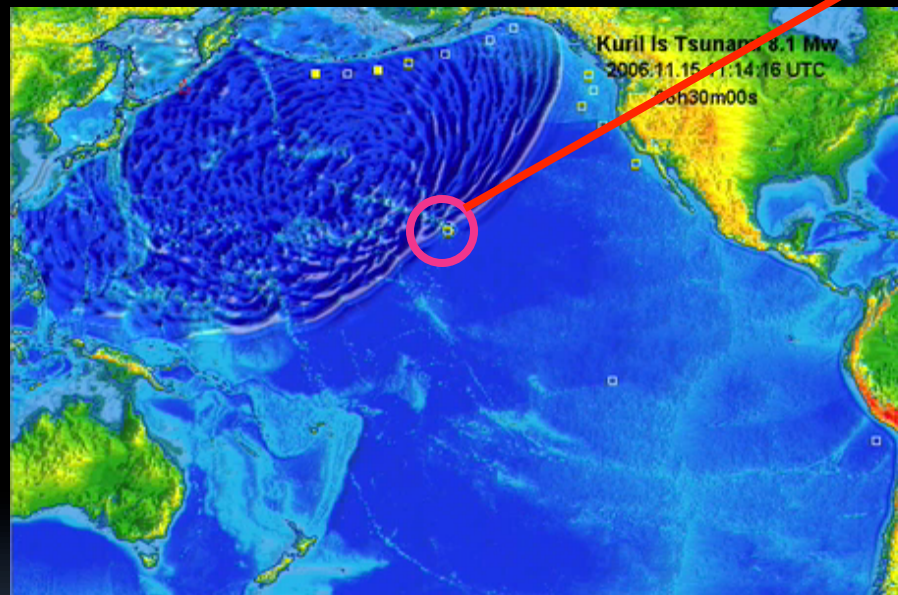
Las ecuaciones de agua poco profunda parecen describir el fenómeno de forma apropiada



DART model-data comparison plots

NOAA Center for Tsunami Research

SIMPLIFICACIONES EN LAS ECUACIONES DE AGUA POCO PROFUNDA

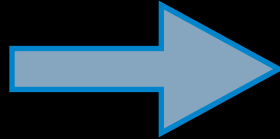


Arcas & Wei, 2011, "Evaluation of velocity-related approximation in the non-linear shallow water equations for the Kuril Islands, 2006 tsunami event at Honolulu, Hawaii", GRL, 38,L12608

Forma Característica de las ecuaciones de agua poco profunda en 1D

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \frac{\partial d}{\partial x}$$



$$p_t + \lambda_1 p_x = g d_x$$

$$q_t + \lambda_2 q_x = g d_x$$

Invariantes de Riemann:

$$p = u + 2\sqrt{gh}$$

$$q = u - 2\sqrt{gh}$$

Autovalores:

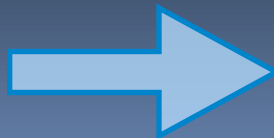
$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$$

$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$$

Valores típicos en agua profunda:

$$u \approx 0.2m / sec$$

$$\sqrt{gd} \approx 220m / sec$$



$$\lambda_1 = \lambda_2 \approx \sqrt{gd}$$

Ilustracion del comportamiento lineal en agua profunda

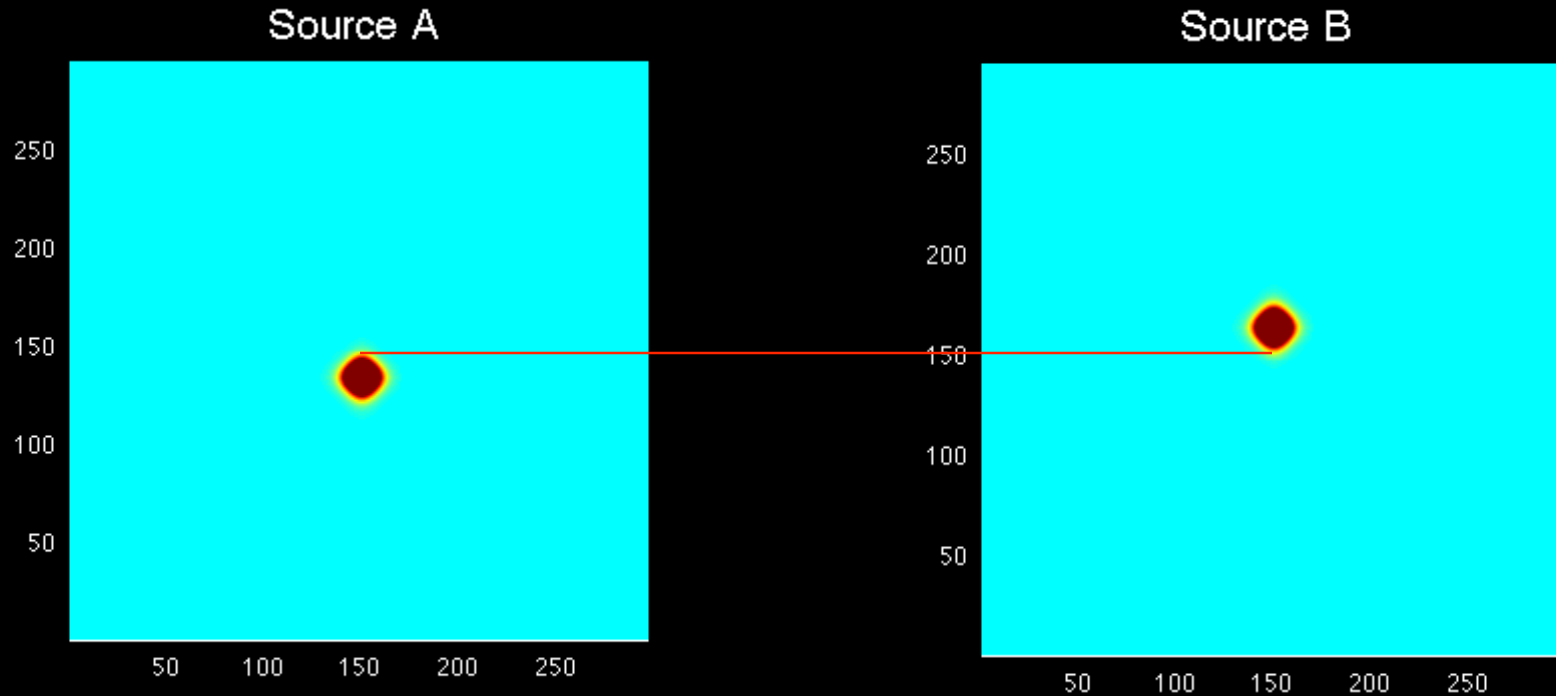
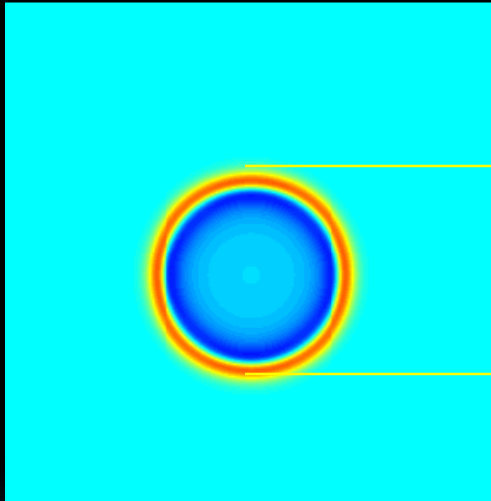
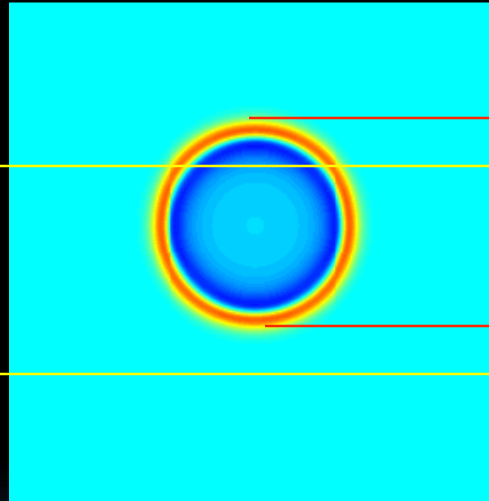


Ilustración del comportamiento lineal en agua profunda

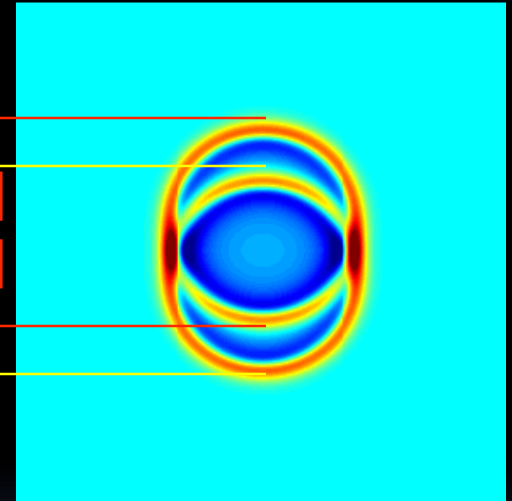
Source A



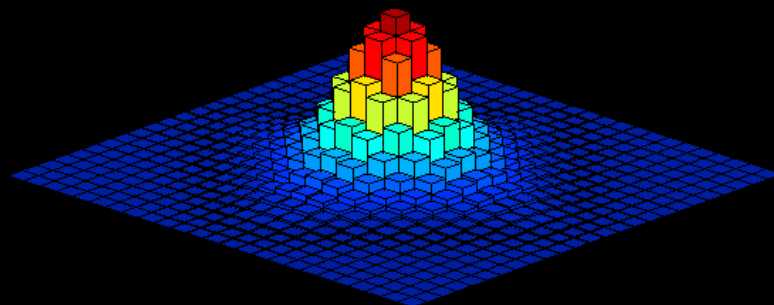
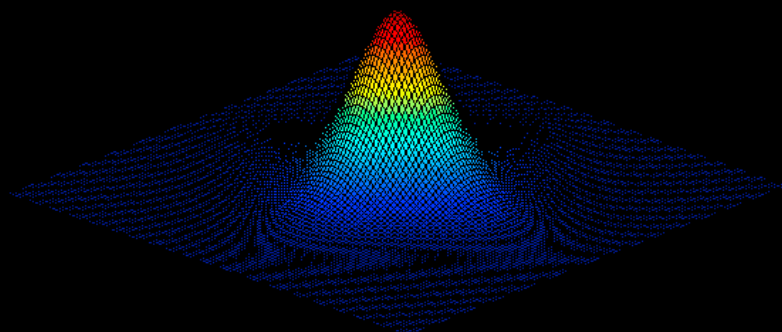
Source B



Source A+B



La linealidad permite la reconstrucción de fuentes mas complejas a partir de otras mas sencillas a través de superposición



Modelos Lineales vs. No-lineales

Características Modelos Lineales

1-Rango de Validez:

- agua profunda.
- para longitudes de onda larga.
- para olas de amplitud pequeña.

2-No se puede calcular inundación

3-Eficientes computacionalmente

4-Ejemplo: RIFT

Características Modelos No-lineales

1- Rango de Validez :

- agua de cualquier profundidad.
- para longitudes de onda larga (no dispersivos).
- para olas de cualquier amplitud.

2-Se puede calcular inundación

3-Eficiencia computacional intermedia

4-Ejemplo: MOST (ComMIT)

Dispersión: De frecuencia, de amplitud y numérica

Dispersión lineal en la aproximación de agua somera

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)} \xrightarrow{kH \sim 0} v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

Dispersión lineal para agua de cualquier profundidad

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)}$$

Dispersion y Disipacion Numerica (Matlab Demo)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

FTCS: Inestable

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = u \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta t}$$

LEAP-FROG: Dispersión, no-disipativo

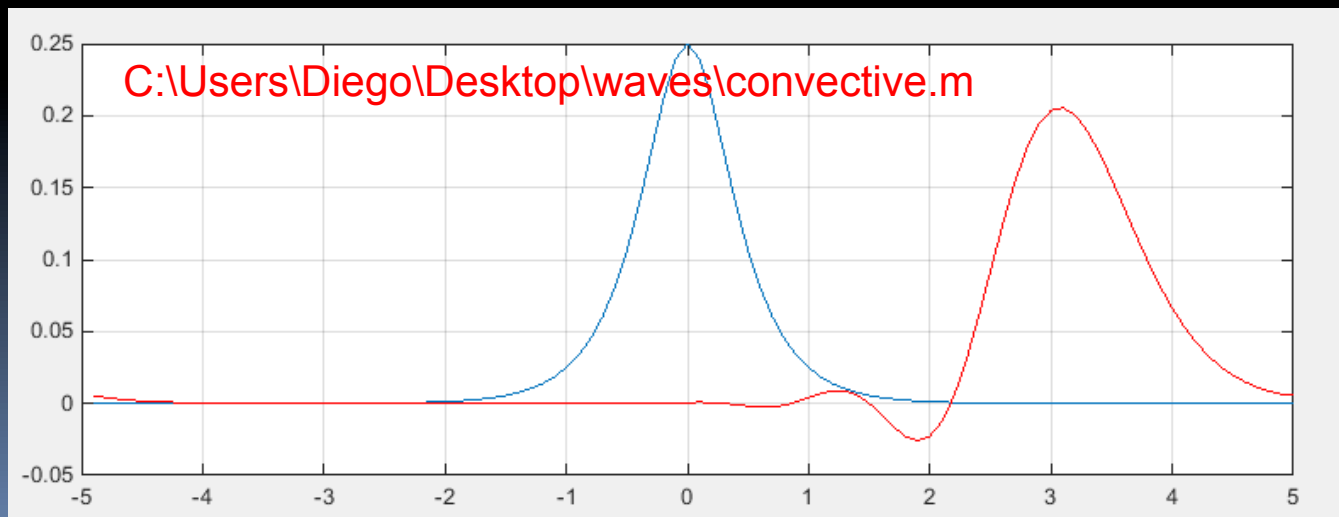
$$\frac{p^{n+1} - p^{n-1}}{2\Delta t} = u \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta t}$$

UPWIND: Estable, altamente disipativo

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = u \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta t}$$

LAX-WENDROFF: Dispersivo, no disipativo

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = u \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta t} + \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{2\Delta t}$$



Dispersive vs. Non-dispersive Models

Características Modelos No-dispersivos

1-Rango de Validez :

- en agua profunda.
- for long waves.
- para longitudes de onda largas e intermedias.
- para olas de cualquier amplitud.

2-Capaces de calcular inundación

3-Capaces de calcular dispersión de amplitud y numerica

4-Cómputo de intensidad media

5-Example: MOST (ComMIT), GeoClaw,..

Características Modelos dispersivos

11-Rango de Validez :

- en agua de profundidad intermedia (Standard Boussinesq, $O(\varepsilon)=O(\mu^2)\ll 1$).
 $\varepsilon=a/h$, $\mu=kh$, Valido para débilmente no-lineal.
- para longitudes de onda largas e intermedias.
- para olas de cualquier amplitud.

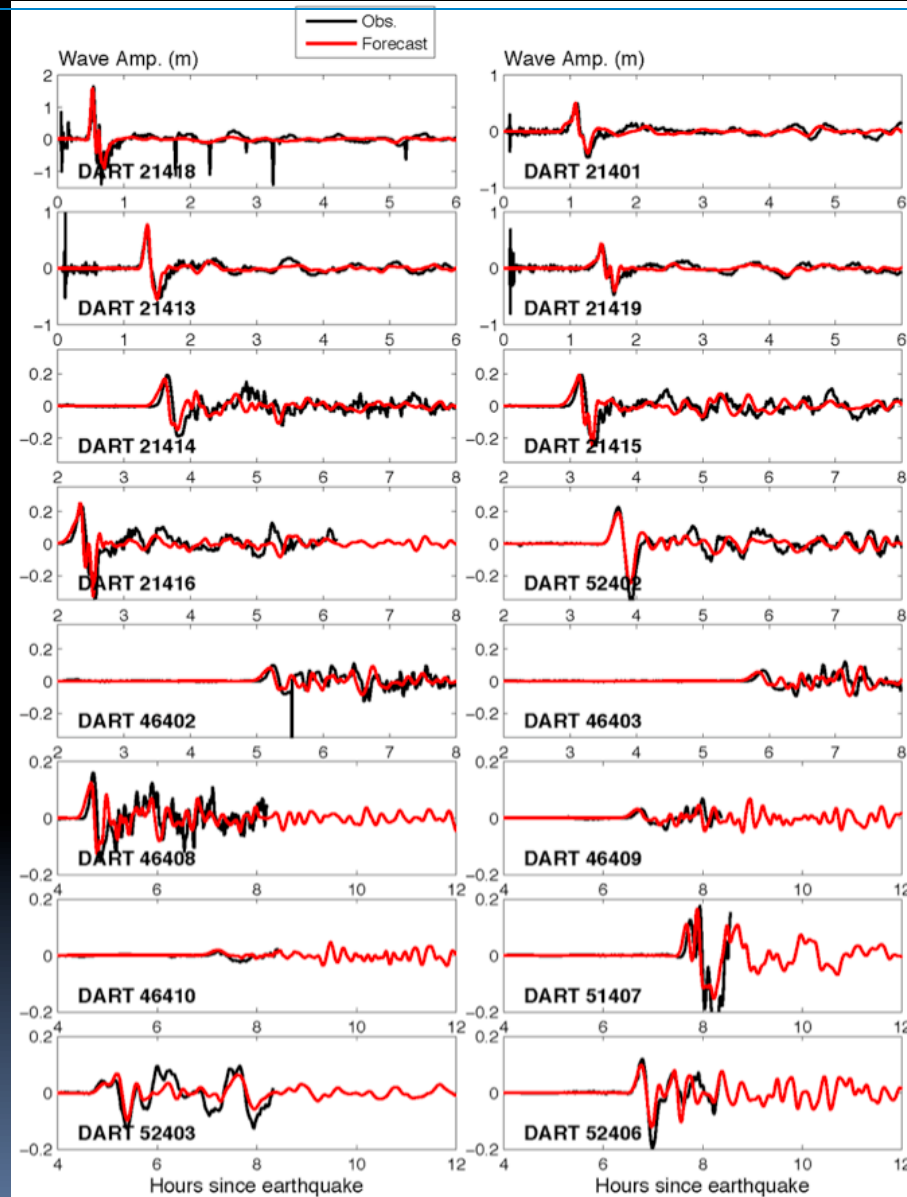
2-Capaces de calcular inundación

3-Capaces de calcular dispersión de amplitud , numerica y de frecuencia.

4-Cómputo muy intenso y lento

5-Ejemplo: COULWAVE, FunWAVE,..

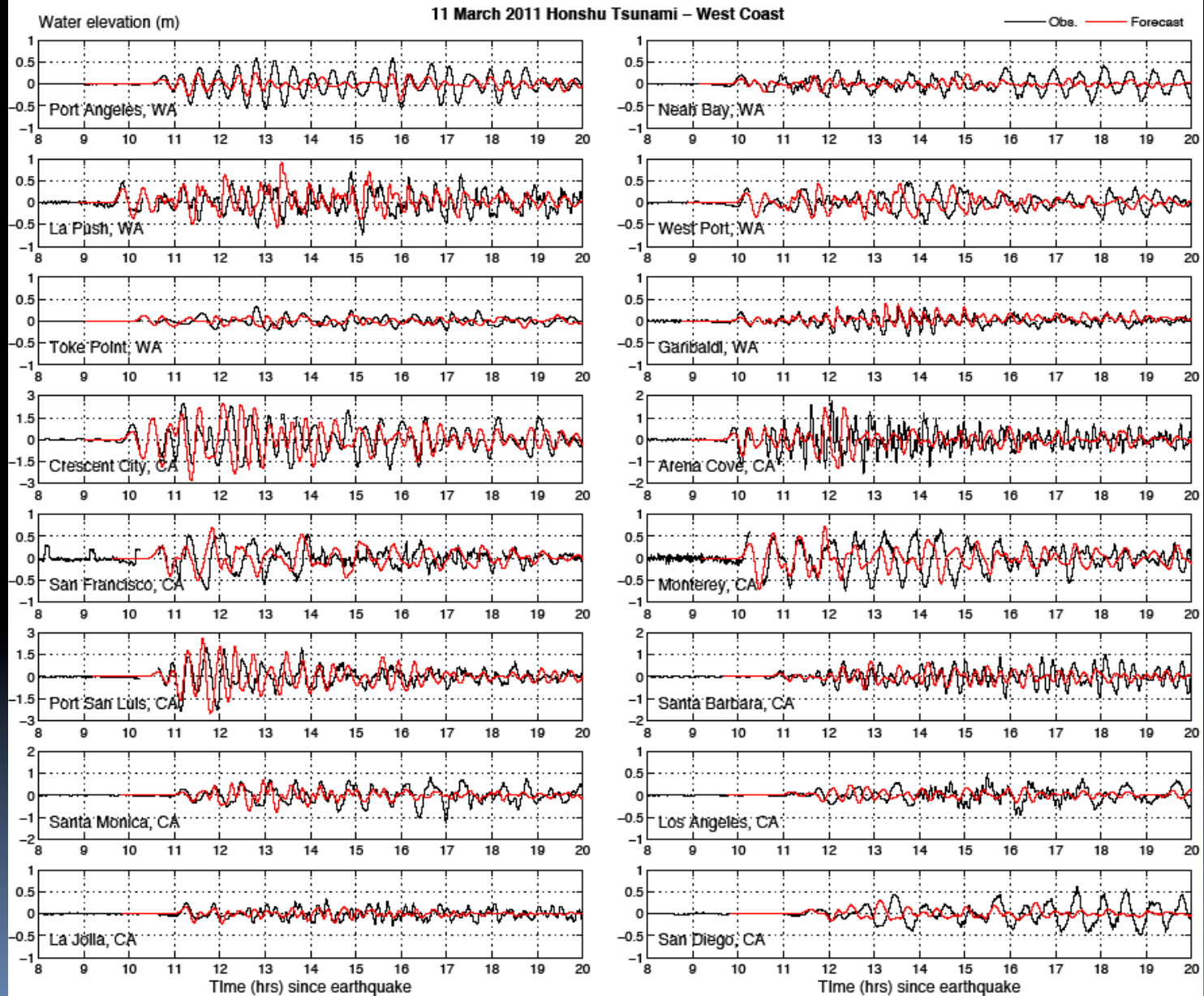
VALIDACION DE LAS AMPLITUDES DE TSUNAMI (Agua Profunda)



DART model-data comparison plots

NOAA Center for Tsunami Research

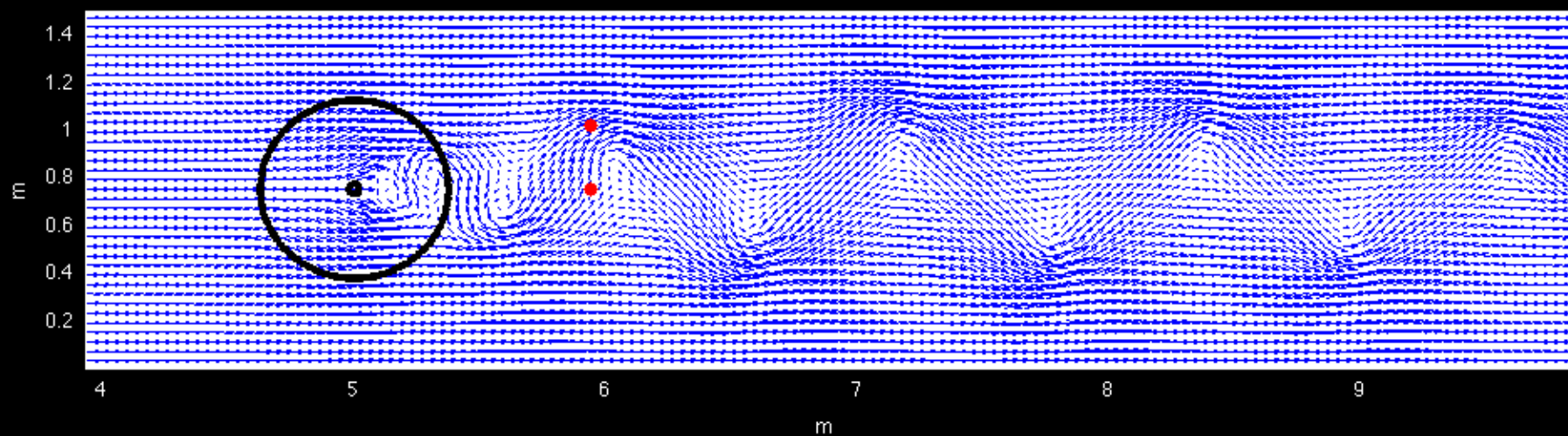
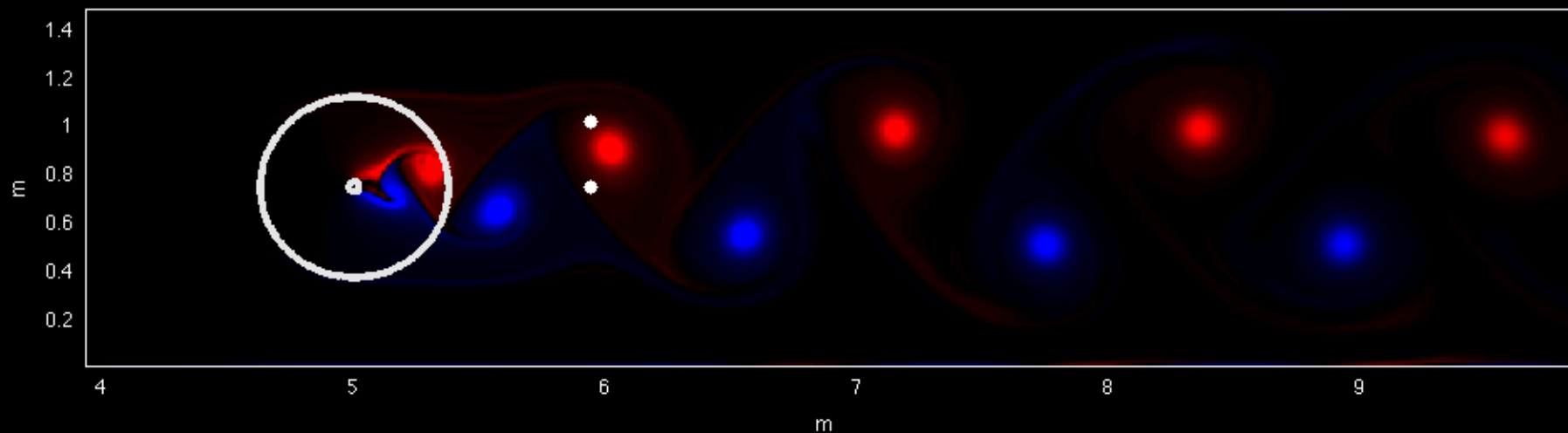
VALIDACION DE LAS AMPLITUDES DE TSUNAMI (Agua Somera)



Yakushima Is. Von Karman Vortex Street Oct 12 2012



BENCHMARK # 1 Time: 119.9 s



VALIDACION DE LAS CORRIENTES DE TSUNAMI

...

